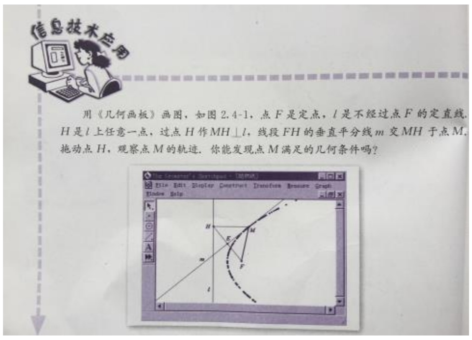
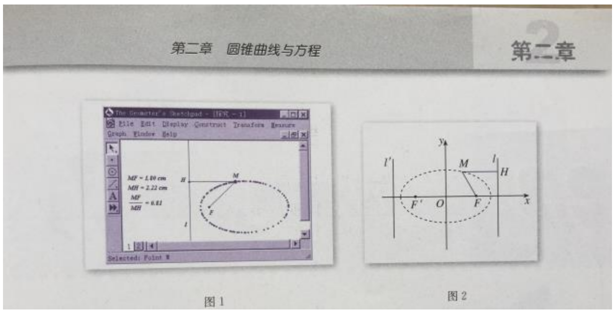
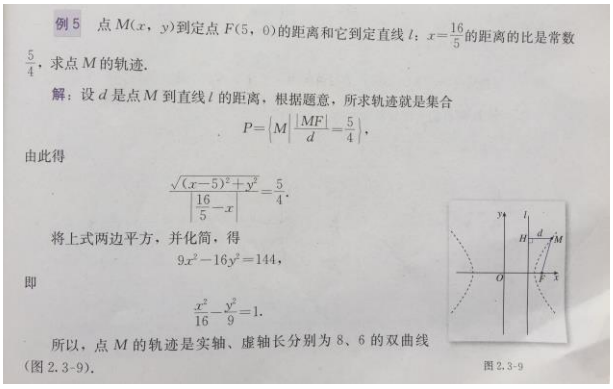
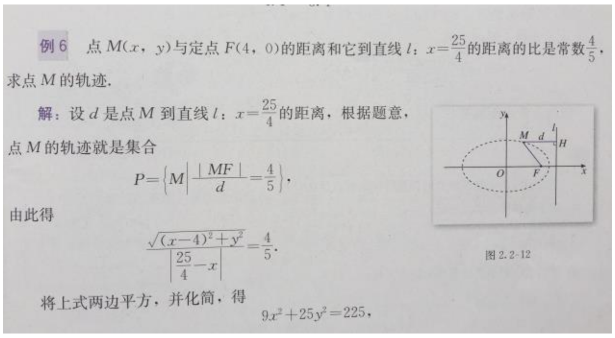
第 140 期
高中教材配套课件创作

课　　题	圆锥曲线的离心率与统一方程（椭圆、双曲线、抛物线第二定义作图）
册别 单元	高中数学 人教 A 版 选修 2-1 第二章圆锥曲线与方程
教材所在页码	P47、P50、P59、P65 和 P76
教材对应截图	 信息技术应用 用《几何画板》画图，如图 2.4-1，点 F 是定点，l 是不经过点 F 的定直线，H 是 l 上任意一点，过点 H 作 $MH\perp l$，线段 FH 的垂直平分线 m 交 MH 于点 M，拖动点 H，观察点 M 的轨迹，你能发现点 M 满足的几何条件吗？  第二章　圆锥曲线与方程　第二章 图 1　图 2  例 5　点 $M(x,y)$ 到定点 $F(5,0)$ 的距离和它到定直线 l：$x=\frac{16}{5}$ 的距离的比是常数 $\frac{5}{4}$，求点 M 的轨迹. 解：设 d 是点 M 到直线 l 的距离，根据题意，所求轨迹就是集合 $P=\left\{M\middle\|\frac{\|MF\|}{d}=\frac{5}{4}\right\}$， 由此得 $\frac{\sqrt{(x-5)^2+y^2}}{\left\|\frac{16}{5}-x\right\|}=\frac{5}{4}$. 将上式两边平方，并化简，得 $9x^2-16y^2=144$， 即 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. 所以，点 M 的轨迹是实轴、虚轴长分别为 8、6 的双曲线（图 2.3-9）. 图 2.3-9  例 6　点 $M(x,y)$ 与定点 $F(4,0)$ 的距离和它到直线 l：$x=\frac{25}{4}$ 的距离的比是常数 $\frac{4}{5}$，求点 M 的轨迹. 解：设 d 是点 M 到直线 l：$x=\frac{25}{4}$ 的距离，根据题意，点 M 的轨迹就是集合 $P=\left\{M\middle\|\frac{\|MF\|}{d}=\frac{4}{5}\right\}$， 由此得 $\frac{\sqrt{(x-4)^2+y^2}}{\left\|\frac{25}{4}-x\right\|}=\frac{4}{5}$. 将上式两边平方，并化简，得 $9x^2+25y^2=225$， 图 2.2-12

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

二、圆锥曲线的离心率与统一方程

利用信息技术作图：已知点 F 是平面上的一个定点，l 是平面上不过点 F 的一线，点 M 到点 F 的距离和它到直线 l 的距离之比是一个常数 e. 观察点 M 的轨迹，轨迹的形状.

可以发现，点 M 的轨迹是圆锥曲线，并且

1. 当 $0<e<1$ 时，轨迹是椭圆；
2. 当 $e>1$ 时，轨迹是双曲线；
3. 当 $e=1$ 时，轨迹是抛物线.

定点 F 是它的焦点，比值 e 是它的离心率. 我们称定直线 l 是它的准线.

这样，我们可以对圆锥曲线下一个统一定义：

平面上到一个定点 F 的距离和它到一条定直线 l 的距离之比是一个常数 e 的点是圆锥曲线，其中点 F 是它的焦点，直线 l 是它的准线，比值 e 是它的离心率.

如何求圆锥曲线的统一方程呢？

如图 1，过点 M 作 $MH\perp l$，H 为垂足，由圆锥曲线的统一定义可知

$$M\in\{M\mid |FM|=e|MH|\}.$$

取过焦点 F，且与准线 l 垂直的直线为 x 轴，点 $F(O)$ 为坐标原点，建立直角坐标系. 设点 M 的坐标为 (x, y)，则

$$|OM|=\sqrt{x^2+y^2}. \quad ①$$

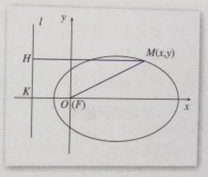


图 1

设直线 l 的方程为 $x=-p$，则

$$|MH|=|x+p|. \quad ②$$

把①②代入 $|OM|=e|MH|$，得

$$\sqrt{x^2+y^2}=e|x+p|.$$

两边平方，化简得

$$(1-e^2)x^2+y^2-2pe^2x-p^2e^2=0.$$

这就是圆锥曲线（椭圆、双曲线、抛物线）在直角坐标系中的统一方程.

</td>
</tr>
<tr>
<td>对应的学习目标</td>
<td>1、体验抛物线的定义及满足条件的动点的轨迹
2、体验椭圆、双曲线、抛物线的离心率特点，理解椭圆、双曲线、抛物线的第二定义，并了解其统一方程</td>
</tr>
<tr>
<td>教学/学习难点</td>
<td>1、满足抛物线条件的动点的轨迹的手动作图非常困难，效果不佳
2、体现椭圆、双曲线离心率对图形的影响需要直观，椭圆、双曲线、抛物线的第二定义的统一作图有利于数形结合辅助理解第二定义</td>
</tr>
<tr>
<td>课件设计说明</td>
<td>1、动态直观展示椭圆、双曲线离心率对图形的影响
2、动态展示椭圆、双曲线、抛物线的第二定义的统一作图，以及相互变化的过程</td>
</tr>
<tr>
<td>使用说明</td>
<td>图形简洁直观、动画效果好、适当的文字辅助说明</td>
</tr>
</table>