

网络画板赛第 94 期打擂题分享

2018

# 高尔顿板小球落，串行嵌套作累加



作者：边步兴

成都景中教育软件有限公司

2018/12/5

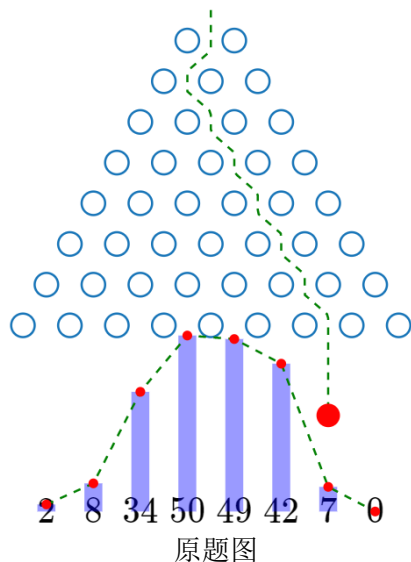


## 网板周赛第 94 期：高尔顿板小球落，串行嵌套作累加

### 【题目呈现】

问题：模拟高尔顿板实验（高中人教 A 版选修 2—3P<sub>70</sub>）

具体要求：高尔顿板的层数可改变，小球向左向右下落随机的，下落速度可调节，落入相应球槽小球动态计数，属于真实模拟实验；



【扫码快阅】请利用手机微信扫描下面的二维码进行快速浏览作品。



### 【制作过程】

1、进入网络画板首页：<http://www.netpad.net.cn>，单击【开始作图】按钮，进入作图页面；

作图前的分析定位：(1)具体动画效果：高尔顿板的层数可改变，小球向左向右下落随机的，下落速度可调节，落入相应球槽小球动态计数，属于真实模拟实验；

(2)所用到的画板技巧：①套用杨辉三角迭代点阵制作高尔顿钉板②通过随机点轨迹制作小球下落路径，然后在小球下落路径上取半自点表示下落小球③两个变量或多个变量+串行动画按钮+if()+测量变量的嵌套的配合使用可解决一大类按条件累加计数问题④用点的轨迹作高尔顿板频率分布折线图；

2、用变量尺工具作变量  $a, t, n, k, i$ ，①变量  $a$  调节高尔顿钉板间的距离；②  $i$  表示试验模拟的次数；③  $n$  调节高尔顿板的层数；④变量  $t$  迭代高尔顿钉板；⑤变量  $k$  迭代底部球槽。

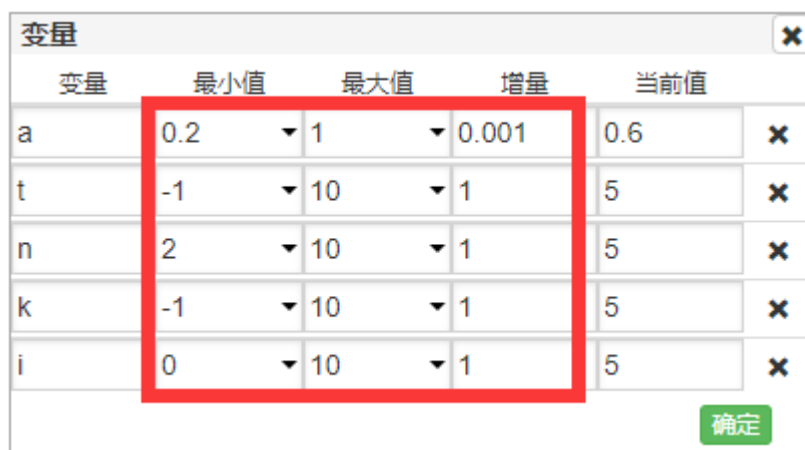


图 1: 变量尺对话框

3、不选任何元素的情况下点击测量工具，在弹出的对话框中输入  $t + 1$  得到测量对象编号为  $m_0$ ，用同样的办法（如下表所示）测量其他表达式，注意对象编号：

测量变量的编号	测量对话框中输入的部分（或者操作方法）	测量对象的含义
$m_0$	$t + 1$	迭代累加迭代高尔顿钉板
$m_1$	$\text{floor}(\sqrt{1 + 8 * t}) / 2$	计算点阵行数
$m_2$	$t - m_1 * (m_1 + 1) / 2$	计算点阵列数
$m_3$	$\text{mod}(i + 2, 2) * \text{if}(\text{randomInt}(0, 2) * 1 \wedge n * 1 \wedge i == 0, -1, 1)$	当 $i(2 \leq i \leq 2n)$ 为偶数时值为 0，当为 $i$ 为奇数时产生随机数 -1 或 1，分别表示小球下落的三种状态：竖直下落、向左下落、向右下落，特别地当 $i=1$ 或 $2*n+1$ 时小球是竖直下落（具体请见图 6）
$m_4$	$\text{sign}(i) * (m_4 + \text{if}(i \geq 2 \text{ and } i \leq 2 * n, m_3, 0))$	累加计数的目的是为了计算下落小球的横坐标
$m_5$	$\text{sign}(i) * (m_5 + 1 \wedge t * \text{if}(i \leq 2 * n, -1, -2 * (n - 1) * 0.618))$	累加计数的目的是为了计算下落小球的纵坐标
$m_6$	$(n + 2) * (n + 1) / 2$	通过高尔顿钉板的层数 $n$ 控制钉板迭代次数
$m_7$	$(-\text{floor}(n) + 1) * a$	通过高尔顿钉板的横向长度计算球槽底部定位参照点的横坐标
$m_8$	$(-2 * \text{floor}(n) + 1) * a * \sqrt{3} / 2$	通过高尔顿钉板的纵向长度计算球槽底部定位参照点的纵坐标
$m_9$	$\text{if}(n \geq 2, 2 * (n - 1) * a, 1 / 0) * \sqrt{3} / 2 * 0.618$	计算高尔顿钉板条形图的高（底部球槽水平距离*0.618）

套用杨辉三角迭代模板：

4、用坐标点工具作出点  $A_1(x_1, y_1)$ （设置  $x$  拖动变量  $x_1$  和  $y$  拖动变量  $y_1$ ）选中点  $A_1$ ，点击平移工具，按向量极坐标方式 ( $m_1 * 2 * a, 4 * \pi / 3$ ) 平移得到点  $A_2$ ，选中点  $A_2$ ，点击平移工具，按向量直角坐标方式 ( $m_2 * 2 * a, 0$ ) 平移得到点  $A_3$ ；



图 2: 用极坐标方式平移 A1 点得到 A2 点(平移缩放合二为一)

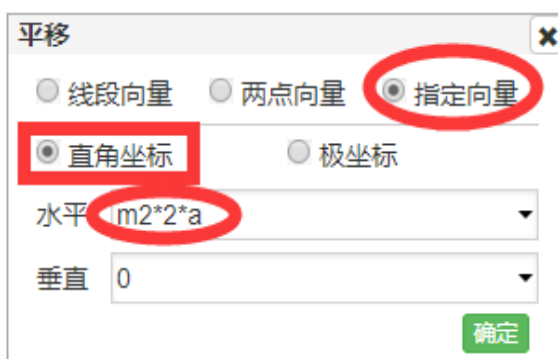


图 3: 用直角坐标方式平移 A2 点得到 A3 点(平移缩放合二为一)

5、选中点  $A_3$  后，点击指定半径的圆工具，以  $a/2$  为半径作圆，选中圆，在扩展标签中显示中输入  $if(m1 > 0, 1, 0)$  (目的迭代隐藏高尔顿板的第一行)；



图 4: 作圆的目的为后面的高尔顿钉板迭代作准备

6、选中变量  $t$ ，点击迭代工具，作  $t \rightarrow m_0$  的迭代，迭代深度为  $m_6$ ，迭代后的效果如下图所示(最后要注意设置迭代变量  $t$  的初始值： $t = -1$ )：



图 5: 用迭代作的高尔顿钉板效果图

7、用坐标点工具作出小球下落球槽定位参照点  $A(x_1 + m_7, y_1 - 3 * \sqrt{3} * a / 4 + m_8 - m_9)$ ，用坐标点工具作出随机点  $M(x_1 + m_4 * a, y_1 - a * \sqrt{3} / 4 + m_5 * a * \sqrt{3} / 2)$ ，按顺序选中变量  $i$  和  $M$  点，点击轨迹工具，在弹出的对话框内设置轨迹的范围： $0 \sim 2 * n + 1$ ，样本数为 50，阈值 50，作出小球下落的随机路径，效果如下图所示



图 6: 高尔顿板层数  $n=8$  时用轨迹作小球下落随机路径

说明:  $m_3: \text{mod}(i + 2, 2) * \text{if}(\text{randomInt}(0, 2) * 1 \wedge n * 1 \wedge i == 0, -1, 1)$   
 与  $m_4: \text{sign}(i) * (m_4 + \text{if}(i >= 2 \text{ and } i \leq 2 * n, m_3, 0))$  组合的含义: 当  $i(2 \leq i \leq 2n)$  为偶数时值为 0, 当为  $i$  为奇数时产生随机数 -1 或 1, 分别表示小球下落的三种状态: 竖直下落、向左下落、向右下落, 特别地当  $i=1$  或  $2 * n + 1$  时小球是竖直下落 (具体请见图 6);

8、利用点工具在前面作好的随机路径 (轨迹) 上取半自由点  $N$  (点值为  $u_0$ ), 选中点  $N$  后, 点击指定半径的圆工具, 以  $a / 2$  为半径作圆, 选中圆, 在属性基础标签中修改填充颜色为红色, 线宽为 0, 作出下落的小球,



图 7：用圆心与半径工具作出随机下落的小球

9、点击动画按钮，如下图弹出的动画编辑对话框中分别添加变量 i、u0，变量 i 的起止范围为：i~i+1，步数为 1，变量 u0 的起止范围为：0~1，步数为 30（这个数这个数字越小小球下落越快），动画序列选择串行，动画类型选择为重复，次数为 256（暂且不能为变量和表达式）



图 8：串行动画按钮

9、点击按钮工具，在弹出的对话框基本设置标签下，类型选择并行，按钮描述初始化，动作设置标签下添加变量 i 和 u0,将这两个变量的初始值都设为 0，得到初始化按钮；



图 10：制作初始化按钮



9、利用自由点工具在轨迹上取半自由点 B，选中点 B，属性基础标签中修改点值为 1；



图 9：修改半自由点点值

10、按顺序选中 A、B 两点，点击测量工具，得到测量出 A、B 的距离，测量对象的编号 m10.

#### 嵌套测量累加计数

11、不选任何元素的情况下点击测量工具，在弹出的对话框中输入

$\text{sign}(i) * (\text{m11} + \text{if}(\text{vpa}(\text{abs}(\text{m10}-0*2*a), 2, 0) == 0 \text{ and } (u0 == 1), 1, 0))$  得到测量对象编号为 m11，用同样的办法（如下表所示）测量其他表达式，注意对象编号：

测量变量的编号	测量对话框中输入的部分（或者操作方法）	测量对象的含义
m11	$\text{sign}(i) * (\text{m11} + \text{if}(\text{vpa}(\text{abs}(\text{m10}-0*2*a), 2, 0) == 0 \text{ and } (u0 == 1), 1, 0))$	统计落入第 1 个球槽的小球个数
m12	$\text{sign}(i) * (\text{m12} + \text{if}(\text{vpa}(\text{abs}(\text{m10}-1*2*a), 2, 0) == 0 \text{ and } (u0 == 1), 1, 0))$	统计落入第 2 个球槽的小球个数
m13	$\text{sign}(i) * (\text{m13} + \text{if}(\text{vpa}(\text{abs}(\text{m10}-2*2*a), 2, 0) == 0 \text{ and } (u0 == 1), 1, 0))$	统计落入第 3 个球槽的小球个数
m14	$\text{sign}(i) * (\text{m14} + \text{if}(\text{vpa}(\text{abs}(\text{m10}-3*2*a), 2, 0) == 0 \text{ and } (u0 == 1), 1, 0))$	统计落入第 4 个球槽的小球个数
...	...	...
m30	$\text{sign}(i) * (\text{m30} + \text{if}(\text{vpa}(\text{abs}(\text{m10}-19*2*a), 2, 0) == 0 \text{ and } (u0 == 1), 1, 0))$	统计落入第 20 个球槽的小球个数



	0))	个球槽的小球个数
m31	sign(i) * (m31 + if(vpa(abs(m10-20*2*a),2,0)==0 and (u0 == 1), 1, 0))	统计落入第 21 个球槽的小球个数
m32	sign(i) * (m32 + if(vpa(abs(m10-21*2*a),2,0)==0 and (u0 == 1), 1, 0))	统计落入第 22 个球槽的小球个数
m33	if(k < 1, m11, k < 2, m12, k < 3, m13, k < 4, m14, k < 5, m15, k < 6, m16, k < 7, m17, k < 8, m18, k < 9, m19, k < 10, m20, k < 11, m21, k < 12, m22, k < 13, m23, k < 14, m24, k < 15, m25, k < 16, m26, k < 17, m27, k < 18, m28, k < 19, m29, k < 20, m30, k < 21, m31, k < 22, m32)	用变量 k 快速读取落入各个球槽的小球个数
m34	max(m11, m12, m13, m14, m15, m16, m17, m18, m19, m20, m21, m22, m23, m24, m25, m26, m27, m28, m29, m30, m31, m32)	落入底部各个球槽中最多小球数
m35	m33 / m34 * 2 * a * (n - 1) * sqrt(3) / 2 * 0.618	相应球槽中小球个数与最多小球数比值
m36	k + 1	球槽底部迭代

**说明：嵌套测量累加计数**

嵌套测量:测量计算内部引用到测量变量自身，叫作测量变量的自身嵌套测量。具体含意见下图：

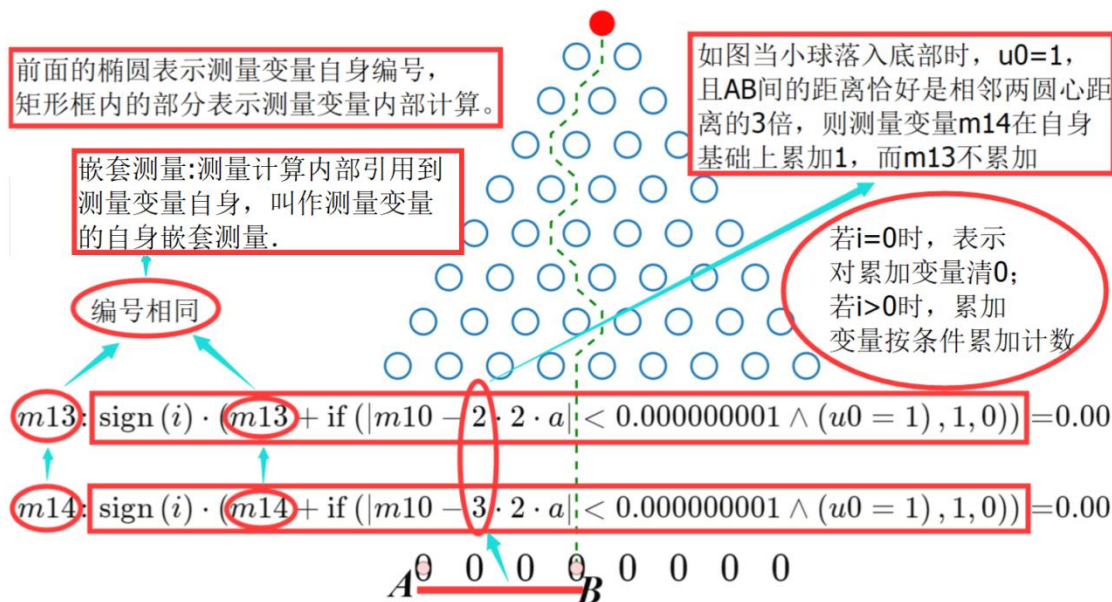


图 10: 嵌套测量累加计数的含义

12、选中点 A，点击平移工具按向量  $(k \cdot 2 \cdot a, 0)$  平移得到点  $A_1$ ，选中点  $A_1$ ，点击平移工具按向量  $(0, m35)$  平移得到点  $A_2$ ，按顺序选中点  $A_1$ 、 $A_2$ ，作线段  $A_1A_2$ ，选中测量变量 m33，和点  $A_1$ ，点击附着/分离工具，将文本合并到点  $A_1$ ，选中变量 k，点击迭代工具，作





$k \rightarrow m36$ 、的迭代，迭代深度为  $n$ ，迭代后的效果如图 10 所示(最后要注意设置迭代变量  $t$ ， $k$  的初始值： $t=-1, k=-1$ )



图 11: 参数迭代高尔顿板底部球槽底条形统计图

13、选中变量  $k$  和点  $A_2$ ，点击轨迹工具，在弹出的轨迹编辑对话框内设置变量起止范围： $0 \sim n-1$ ，样本数为  $n$ ，阈值为 50，在属性中修改轨迹线型为虚线，重复刚才的动作，再做一次点  $A_2$  的轨迹，在属性基础标签中修改线的颜色、填充色为红色，线宽为 5；



图 12: 用轨迹作频率分布折线图

### 【经验分享】

1、通过坐标点工具设置拖动变量也可达到自由点拖动效果，假若直接作自由点，拖动子对象时会影响到其他对象，而通过设置拖动变量时拖动子对象时不会影响到其他对象。



- 2、通过随机点轨迹制作小球下落路径，然后在小球下落路径上取半自点表示下落小球，而不是直接用随机点表示下落小球。
  - 3、高尔顿钉板迭代时教程中用极坐标平移的方式把平移与缩放合二为一，所以比课件中少作了两个点，读者可以试着作一下看二者有何异同。
  - 4、两个变量或多个变量+串行动画按钮+if()+测量变量的嵌套的配合使用可解决一大类按条件累加计数问题。
  - 5、i 变化一次，且当  $u_0=1$ （即小球落入球槽底部）时，两者同时满足则累加计数一次。
  - 6、i 表示总的实验次数；好处不用另外计算，重新实验时一定要按初始化按钮清 0。
  - 7、速度快慢可通过设置  $u_0$  的动画步数来调节速度（步数与小球下落速度成反比），而变量 i 的步数只能为 1。
  - 8、在测量变量  $m_{11} \sim m_{32}$  累加测量时，以  $m_{11}$  为例：假若到 A、B 两点重合时（即小球落入第一个球槽），由于测量精度（浮点数的原因），测量到 A、B 两点的距离  $m_{10}$  可能是 0.00000001，若  $m_{11}$  内部测量内容为  $\text{sign}(i) * (m_{11} + \text{if}(\text{abs}(m_{10}-0*2*a)==0 \text{ and } (u_0 == 1), 1, 0))$  时可能出现不累加计数的问题，修改为  $\text{sign}(i) * (m_{11} + \text{if}(\text{vpa}(\text{abs}(m_{10}-0*2*a), 2, 0) \text{ and } (u_0 == 1), 1, 0))$  则可解决不累加计数的问题。
- 说明：**函数  $\text{vpa}(\text{num}, \text{digit}, \text{isfloor})$  的含义： $\text{num}$  表示某数字， $\text{digit}$  表示几位小数， $\text{isfloor}$ ，表示向上（1）还是向下（-1）还是四舍五入（0）。
- 9、由于嵌套测量累加计数暂且还不支持迭代，所以从  $m_{11} \sim m_{32}$ （对落入各个球槽小球计数）是一个一个测量计算的， $m_{33}$  是扫描读取  $m_{11} \sim m_{32}$  的数据，最后用迭代完成落入各个球槽的计数问题（层数最多能为 22）。

### 【小试牛刀】

问题：如图所示的点阵中，点 A 随机的向右或向上 1 格的运动，则点 A 从左下角开始运动到右上角停止，作出点 A 运动的动画。

