

网络画板赛第 90 期打擂题分享

2018

同点异速点值控，s、t 折线点驱动



作者：边步兴

成都景中教育软件有限公司

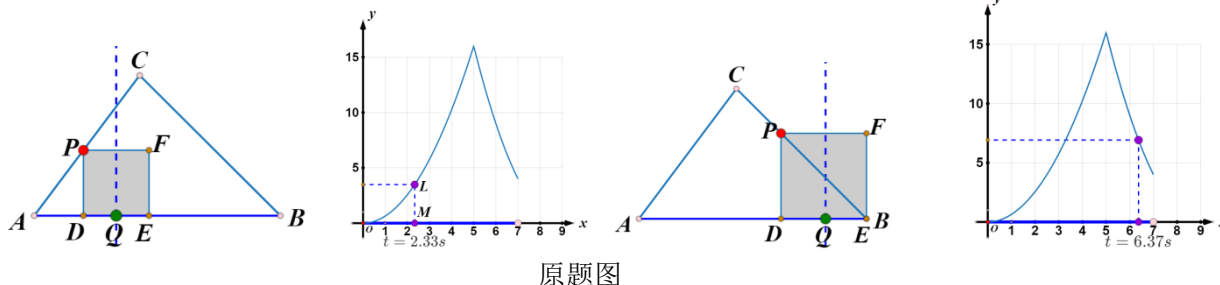
2018/7/9



【题目呈现】

如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=7$, $BC=4\sqrt{2}$, $\angle B=45^\circ$, 动点 P 、 Q 同时出发, 点 P 沿 $A \rightarrow C \rightarrow B$ 运动. 在边 AC 的速度为每秒 1 个单位长度, 在边 CB 的速度为每秒 $\sqrt{2}$ 个单位长度; 点 Q 沿 $B \rightarrow A \rightarrow B$ 以每秒 2 个单位长度的速度运动, 其中一个动点到达终点时, 另一个动点也停止运动. 在运动过程中, 过点 P 作 AB 的垂线与 AB 交于点 D , 以 PD 为边向右作正方形 $PDEF$; 过点 Q 作 AB 的垂线 l , 将正方形 $PDEF$ 与 $AABC$ 重叠部分图形记为图形 M . 图形 M 的面积为 y (平方单位), 设运动时间为 t (秒).

- (1) 当点 P 运动到点 C 时, PD 的长度为.
- (2) 求点 D 在直线 l 上时 t 的值.
- (3) 求 y 与 t 之间的函数关系式.
- (4) 直接写出在运动过程中直线 l 将图形 M 的面积平分时 t 的值.



【扫码快阅】请利用手机微信扫描下面的二维码进行快速浏览作品。



【制作过程】

1、进入网络画板首页: <http://www.netpad.net.cn>, 单击【开始作图】按钮, 进入作图页面; 作图前的分析定位: 这是典型的同点异速, 走走停停问题, 为便于展开变式教学可作成模板的形式:

(1) 题目中已知条件:

- ① 动点在所经折线路径顶点处的停顿时间已知;
 - ② 动点在所经折线路径每段的速度已知;
- (动点在路径的顶点处停顿时间可调、动点在所经折线路径每段的速度可调)

(2) 动点 P 按时间分区有 5 个状态:

- ① 动点 P 在路径 $A \rightarrow C \rightarrow B$ 顶点 A 处的停顿时间;
- ② 动点 P 在路径 $A \rightarrow C \rightarrow B$ 的 AC 段运动时间 (AC 段的路程/ AC 段的速度);
- ③ 动点 P 在路径 $A \rightarrow C \rightarrow B$ 顶点 C 处的停顿时间;



④动点 P 在路径 $A \rightarrow C \rightarrow B$ 的 CB 段运动时间 (CB 段的路程/ CB 段的速度)；

⑤动点 P 在所经折线路径 $A \rightarrow C \rightarrow B$ 顶点 B 处的停顿时间；

(3)同理动点 Q 按时间分区有 4 个状态：

①动点 Q 在路径 $B \rightarrow A \rightarrow B$ 顶点 B 处的停顿时间；

②动点 Q 在路径 $B \rightarrow A \rightarrow B$ 的 BA 段运动时间 (BA 段的路程/ BA 段的速度)；

③动点 Q 在 路径 $B \rightarrow A \rightarrow B$ 顶点 A 处的停顿时间；

④动点 Q 在路径 $B \rightarrow A \rightarrow B$ 的 AB 段运动时间 (AB 段的路程/ AB 段的速度)；

(4)以各个状态累计时间为横坐标，各个状态的累计路程/总路程为纵坐标作点，分别选中各个状态的点作路径

(5)分别在路径上取点

2、①如下图点击变量尺工具，输入变量 V_{P_AC} 、 V_{P_CB} (分别表示点 P 在路径 $A \rightarrow C \rightarrow B$ 的 AC 、 CB 段上的速度)； V_{Q_BA} ， V_{Q_AB} (分别表示点 Q 在路径 $B \rightarrow A \rightarrow B$ 的 BA 、 AB 段上的速度)，



图 1：变量尺对话框

②如下图点击变量尺工具，输入变量 P_{A_t} 、 P_{C_t} (分别表示动点 P 在路径 $A \rightarrow C \rightarrow B$ 的顶点 A 、 C 上的时间)； Q_{B_t} ， Q_{A_t} (分别表示动点 Q 在路径 $B \rightarrow A \rightarrow B$ 的顶点 B 、 A 上的时间)；



图 2：变量尺对话框

③如下图点击变量尺工具，输入变量 AB 、 BC (分别表示 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 BC 长)； 输入变量 a (表示 $\angle ABC$ 的度数)；

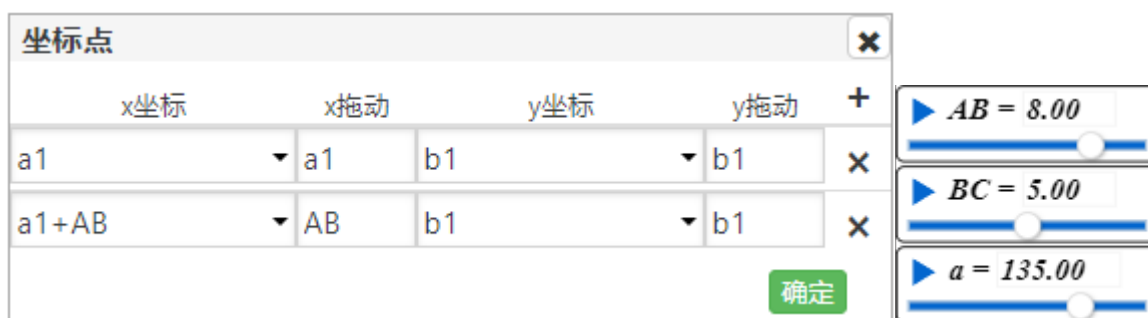


图 3: 变量尺对话框

3、建立初始化按钮，给变量赋初始值，如下图：点击动作按钮，弹出的对话框中类型选择并行，名称中填初始化，在动作设置中选择设置变量，给变量赋初始值（多次操作）

$AB=7, BC=4\sqrt{2}$ (含义 $4\sqrt{2}$), $a=135$, $V_P_AC=1, V_P_CB=\sqrt{2}$ (含义 $\sqrt{2}$), $V_Q_BA=2$, $V_Q_AB=2$, $P_A_t=0$, $P_C_t=0$, $Q_B_t=0$, $Q_A_t=0$, $u0=0$;



图 4: 用动作按钮给变量赋初始值

4、用坐标点工具作出点 $A(a1,b1)$ 、 $B(a1+AB,b2)$ 注意设置拖动参数，选中点 B 按极坐标 (BC,a) 平移得到点 C ，作线段 BA 和路径 $A \rightarrow C \rightarrow B$;

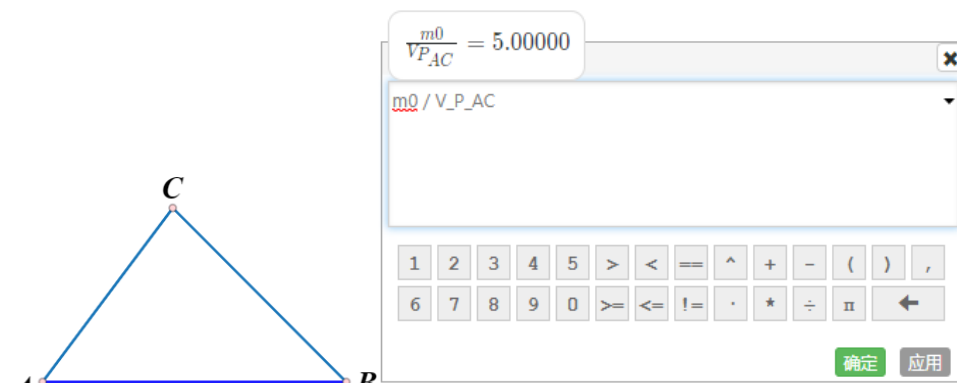


图 5: 用路径线段作 $\triangle ABC$

图 6: 测量对象对话框



5、选中点 A 和点 C，点击测量工具测量得线段 AC；编号为 m0，在不选中对象的情况下，点击测量工具，在弹出的对话框中输入 m0 / V_P_AC，得到测量对象编号为 m1，用同样的办法（如下表所示）测量其他表达式，注意对象编号：

测量变量的编号	测量对话框中输入的部分（或者操作方法）	测量对象的含义或作用
m0	选中线段 AC，点击测量工具	线段 AC 长
m1	$m0 / V_P_AC$	点 P 在线段 AC 上的运动时间
m2	CB / V_P_CB	点 P 在线段 CB 上的运动时间
m3	AB / V_Q_BA	点 Q 在线段 BA 上的运动时间
m4	AB / V_Q_AB	点 Q 在线段 AB 上的运动时间
m5	$\min(P_A_t + m1 + P_C_t + m2, Q_B_t + m3 + Q_A_t + m4)$	动点 P、Q 两点先到目的地所用的时间
m6	$\max(P_A_t + m1 + P_C_t + m2, Q_B_t + m3 + Q_A_t + m4)$	动点 P、Q 两点后到目的地所用的时间
m7	$\text{if}(m > 0.5, m5, m6)$	用动作按钮切换： $m=1$ 时，动点 P、Q 两点其中一点到达终点后等待，另一点停止运动， $m=0$ 时动点 P、Q 两点其中一点到达终点后等待，另一点继续运动。

6、作自定义坐标系，在自定义坐标系下按下列表格作出各个状态点的坐标：

①作动点 P 与时间 t 的折线图

各个状态点的编号	横坐标(累计时间)	纵坐标（累计路程/总路程）	说明
0	0	0	①速度=路程/时间 ②动点 P 与时间 t 的折线图，各个状态点的横坐标为累计时间，各个状态点的纵坐标为累计路程， ③由于动点 P、Q 的点值取值范围在 0~1 之间，所以各个状态点的纵坐标=累计路程/总路程
A ₁	P_A_t	0	
A ₂	$P_A_t + m1$	$m0 / (m0 + BC)$	
A ₃	$P_A_t + m1 + P_C_t$	$m0 / (m0 + BC)$	
A ₄	$P_A_t + m1 + P_C_t + m2$	$(m0 + BC) / (m0 + BC)$	
A ₅	m6	$(m0 + BC) / (m0 + BC)$	

按顺序选中各个状态点，作路径 0→A₁→A₂→A₃→A₄→A₅（由于 A₄、A₅ 两点有可能重合，可在对象列表中选择点）；

②、作动点 Q 与时间 t 的折线图

各个状态点的编号	横坐标(累计时间)	纵坐标（累计路程/总路程）	说明
0	0	0	①速度=路程/时间 ②动点 Q 与时间 t 的折线图，各个状态点的横坐标为累计时间，各个状态点的纵坐标为累计路程， ③由于动点 P、Q 的点值取值
B ₁	Q_B_t	0	
B ₂	$Q_B_t + m3$	$m0 / (m0 + BC)$	
B ₃	$Q_B_t + m3 + Q_A_t$	$m0 / (m0 + BC)$	
B ₄	$Q_B_t + m3 + Q_A_t + m4$	$(m0 + BC) / (m0 + BC)$	



B_5	m6	0	范围在 0~1 之间，所以各个状态点的纵坐标=累计路程/总路程
-------	----	---	---------------------------------

按顺序选中各个状态点，作路径 $0 \rightarrow B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow B_3 \rightarrow B_4 \rightarrow B_5$ (由于 B_4 、 B_5 两点有可能重合，可在对象列表中选择点)；

③在自定义坐标系中，作点 $G(m7, 0)$ ，按顺序选中原点 $O(0, 0)$ 和 $G(m7, 0)$ 作线段，在线段上取半自由点 H (对应的参数为 u_0)，选中 H 点，用智能画笔作平行 y 轴与两条折线路径的交点 I 、 J ，选中 H 测量点 H 横坐标 (动点所运动的当前时间)，测量对象编号为 $m8$ ，同理测出点 I 、 J 的纵坐标，测量对象编号为 $m9$ (用来驱动从动点 P)， $m10$ (用来驱动从动点 Q)

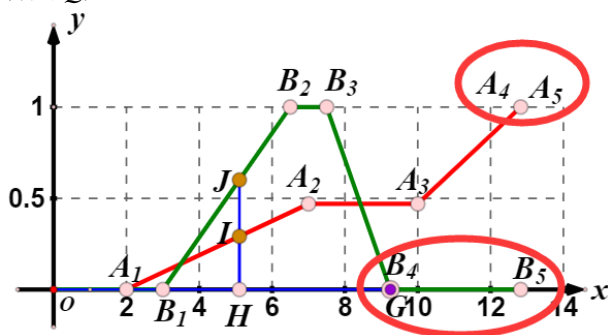


图 7：折线路径上取点值

7、利用点工具在路径 $A \rightarrow C \rightarrow B$ 上取半自由点 P ，在属性中修改点值为 $m9$ ，在线段 BA 上取半自由点 Q ，在属性中修改点值为 $m10$ ，

8、用智能画笔过点 P 作 $PD \perp AB$ ，按顺序选中 D 、 P 两点，点击正多边形 (定边数) 工具，在弹出的对话框内输入 4，作出正方形 (如下图所示，按顺序选中 D 、 E 、 F ，点击左上角小窗口，按批量标签，弹出的对话框，起始标签处输入 D)。选中正方形 $PDEF$ ，点击测量工具测得其面积，测量对象编号为 $m11$ ；

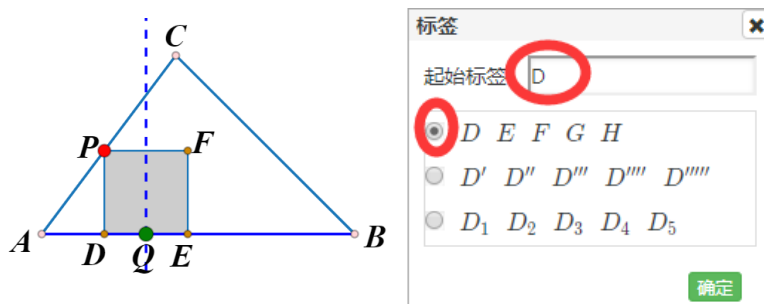


图 8：作正方形 $PDEF$

9、选中点 Q 和线段 AB ，用垂线工具作出过点 Q 与线段 AB 的垂线。

10、点击自定义坐标系工具，作出新的坐标系后，作点 $K(m7, 0)$ ， $L(m8, m11)$ ，

按顺序选中点 O 、 K 作线段 OK ，在线段上取半自由点 M (对应的参数为 u_0)，选中 M 点和点 L 用轨迹工具作轨迹作出正方形 $PDEF$ 面积 S 与时间 t 的函数

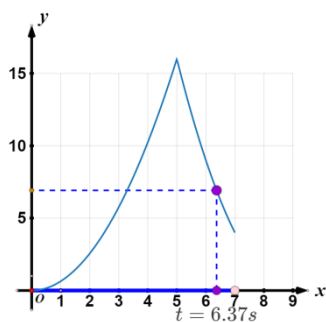


图 9: $S_{\text{正方形}PDEF}$ 与时间 t 的函数图象

11、美化后的效果如原题图所示.

【经验分享】

1、关于解决同点异速，走走停停问题的思路：不外乎就是一个半自由点的点值获取问题，可以反其道而行之：通过做路程 S 时间 t 与点值之间的折线图(变换后)，再通过折线图上的点的纵坐标倒回去表示半自由点的点值，这样做的优点是计算量小，个人认为具备一定的通实性.

2、模板教学的好处是变式教学，通过一道题讲清一类题.

3、在这里从 S 、 t 折线图中获取驱动点 P 、 Q 两点的点值，在线段 OG ($G(m7,0)$) 上取半自点 H ，测量出 H 点的横坐标表示动点运动当前时间，这样做的好处拖动半自由点 H 不会出界，假若直接作点 $H(t, 0)$ (设置横坐标拖动参数为 t)，拖动点 H 会使 H 点出界，即时间 t 超出自变量的取值范围.

【小试牛刀】

1、如图①，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AB=10$ ， $BC=6$ ，点 P 从点 A 出发，沿折线 $AB \rightarrow BC$ 向终点 C 运动，在 AB 上以每秒 5 个单位长度的速度运动，在 BC 上以每秒 3 个单位长度的

速度运动，点 Q 从点 C 出发，沿 CA 方向以每秒个 $\frac{4}{3}$ 单位长度的速度运动 P ， Q 两点同时

出发，当点 P 停止时，点 Q 也随之停止. 设点 P 运动的时间为 t 秒.

(1)求线段 AQ 的长；(用含 t 的代数式表示)

(2)连结 PQ ，当 PQ 与 $\triangle ABC$ 的一边平行时，求 t 的值；

(3)如图②，过点 P 作 $PE \perp AC$ 于点 E ，以 PE ， EQ 为邻边作矩形 $PEQF$. 设矩形 $PEQF$ 与 $\triangle ABC$ 重叠部分图形的面积为 S . 直接写出点 P 在运动过程中 S 与 t 之间的函数关系式和自变量的取值范围.

