2018

网板周赛第 87 期：圆圆切切反演弹，大珠小珠落玉盘

作者：王广喜

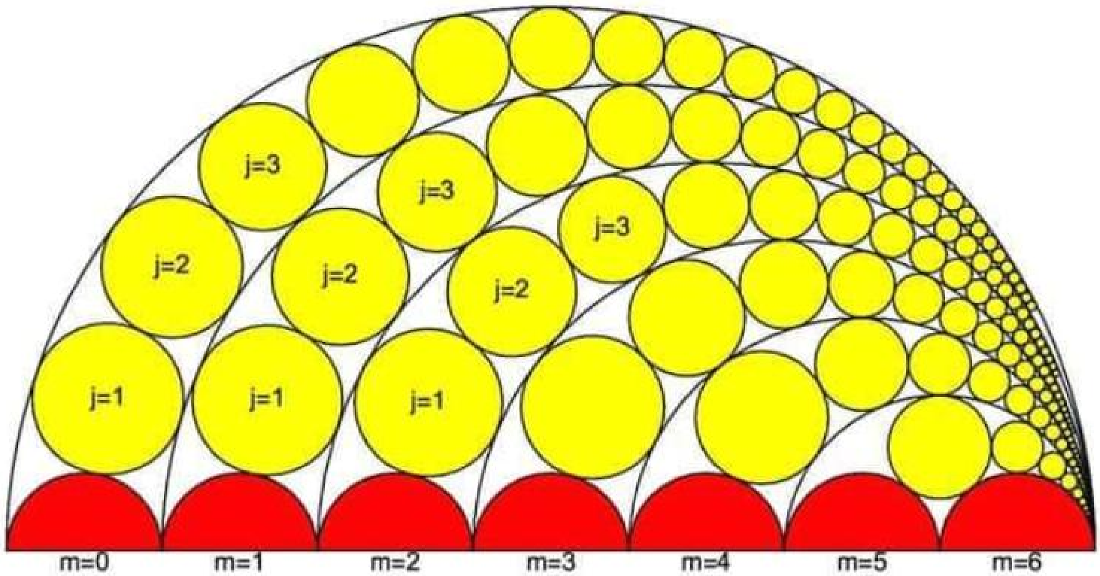
成都景中教育软件有限公司

2018/10/15

网板周赛第 87 期：圆圆切切反演弹，大珠小珠落玉盘

【题目呈现】

利用网络画板构造下面的图形，要求：半圆和圆的个数可控.



$$n = 7$$

$$r_{n,m,j} = \frac{(n-m)^2 - (n-m)}{(m-n)^2 - (n-m) + j^2} \cdot \frac{R}{n}.$$

Francisco Javier García Capitán, 10/Mar/2018.

原题图

【扫码快阅】请利用手机微信扫描下面的二维码进行快速浏览作品.

【制作过程】

1、进入网络画板首页：*http://www.netpad.net.cn*，单击【开始作图】按钮，进入作图页面；

2、作图前的分析定位：初见此图发现都是圆形构成的美丽图案，而且圆形排布很有规律，

这里面涉及到两圆的内切、外切两种情形，反演变换处理此类问题非常方便，该变换可以将直线变换为圆，变换前后相切关系不变．在两条竖线形成的“带状区域”里绘制一组相切圆是容易的，再将这些圆反演到大半圆内即可．

3、新增变量：变量 k 为反演率，范围是 0~100；变量 R 为最大半圆的直径，范围为 0~20；变量 n 为将最大半圆等分份数，范围为 2~10；变量 f 为小圆层数，范围为 0~20；变量 a 是给小圆编号使用的变量，范围为 0~10；以上所有变量增量均为 1（如图 1）．


变量

变量	最小值	最大值	增量	当前值
k	0	100	1	5
R	0	20	1	5
n	2	10	1	5
f	0	20	1	5
a	0	10	1	0

确定

图 1：新增变量

4、新增计算：$m0$：a+1，该计算是为了在迭代过程中确保 a 的值每次增加 1，这样就能给小圆进行编号，小圆的编号从 0 开始．

5、新增点对象：将坐标原点 O 水平方向平移 $-R + a * R / n$ 个单位得到 1 号点；将坐标原点 O 水平方向平移 $-R + (a + 1) * R / n$ 个单位得到 2 号点；建立直角坐标点 3，其横坐标为 $k / (-R + a * R / n)$，纵坐标为 0；建立直角坐标点 4，其横坐标为 $k / (-R + (a + 1) * R / n)$，纵坐标为 0；在这里解释一下：点 1 关于原点 O 的反演点为点 3；点 2 关于原点 O 的反演点为点 4．接下来，将点 3 绕点 4 逆时针旋转 90° 得到点 5；将点 4 绕点 3 顺时针方向旋转 90° 得到点 6；最后作出点 5 和点 6 确定的线段的中点 7（如图 2）．

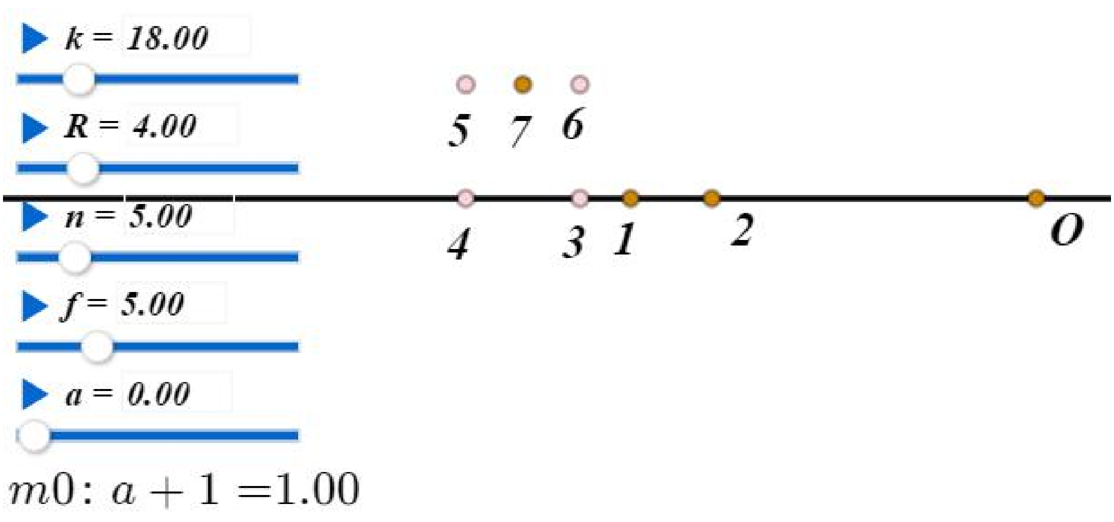


图 2：新增点对象

6、新建射线和圆对象并进行反演变换．以点 3 为端点过点 6 作射线 8；以点 7 为圆心过点 6 作圆 9；依次选中圆 9、射线 8、原点 O，使用【变换工具箱】里的【反演】工具得到圆 10 和圆弧 11，其中圆 9 关于原点 O 的反演象为圆 10、射线 8 关于原点 O 的反演象为圆弧 11（如图 3）．

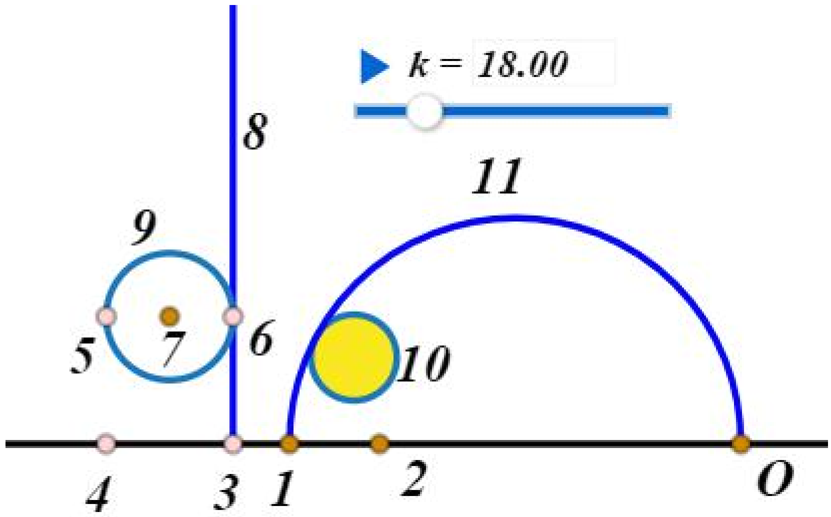


图 3：圆与射线的反演

7、进行第一次迭代：选中点 3 和点 4，利用【变换工具箱】里的【迭代】工具进行迭代：其中点 3 的映象为点 6，点 4 的映象为点 5，迭代深度为变量 f，只显示圆 10 的迭代象，其余对象都不显示（如图 4）．

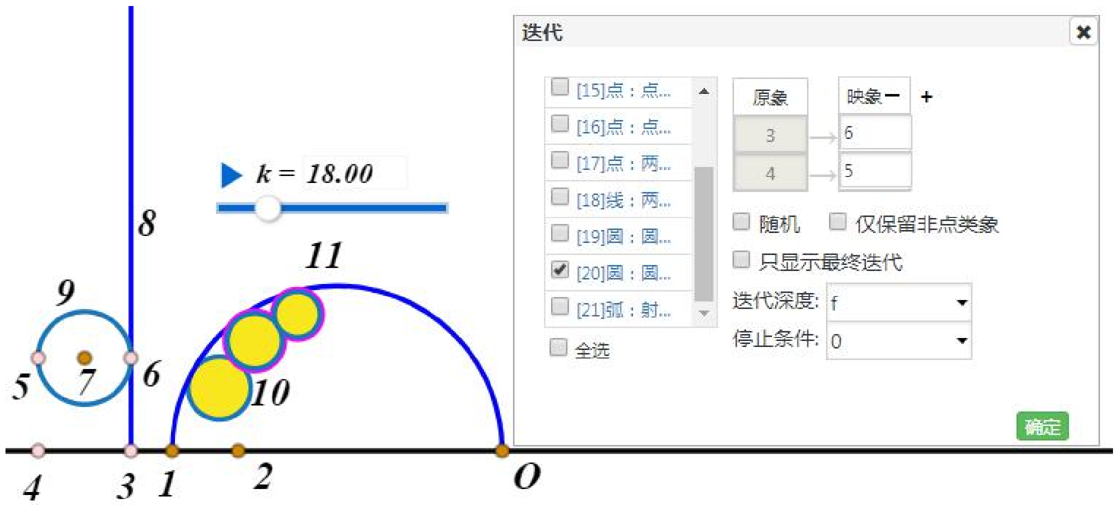


图 4：反演的迭代

8、构造直径上的小半圆：作出点 1 和点 2 确定线段的中点 12；依次选中点 12、点 2、点 1 利用【圆心与两点的弧】工具构造出小半圆，并填充上绿色．

9、进行第二次迭代：选中变量 a 进行迭代，其中变量 a 的映象为 $m0$，迭代深度为 n-1，在【迭代】对话框左侧勾选圆弧 11、圆 10、第一次迭代象、小半圆（如图 5）．

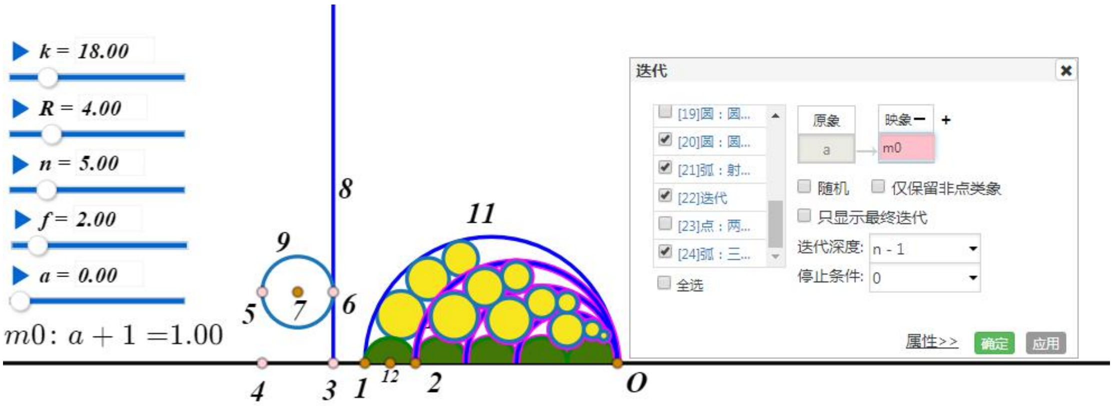


图 5：迭代的迭代

10、修饰美化工作．隐藏除原点 O 和点 1 外的所有点对象、射线 8、圆 9，最终效果如图 6 所示．

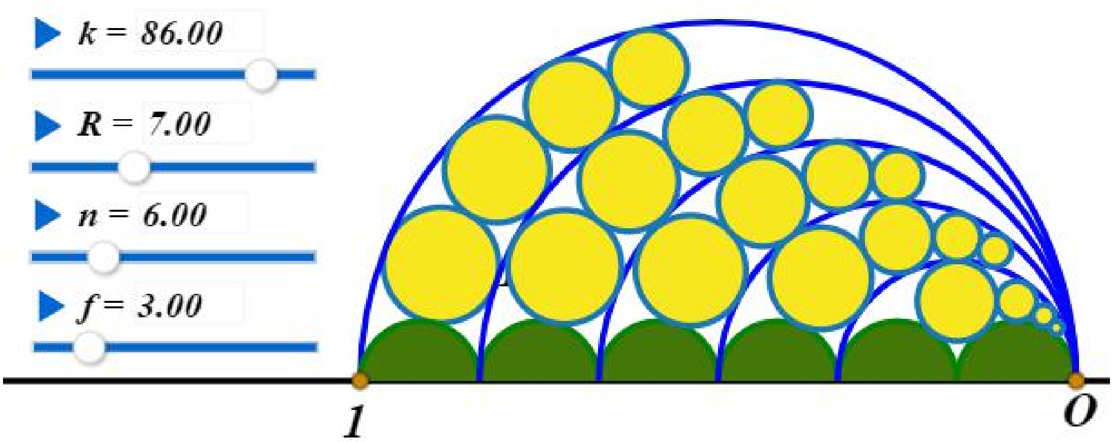


图 6：最终效果图

【经验分享】

在本文涉及到的“反演变换”具有许多的美妙性质．下面我们开始认识一下这种变换．如图 7 所示，给定圆心为点 O，半径为 r 的⊙O，若点 P 不与点 O 重合，则点 P 关于⊙O 的反演点 P' 在射线 OP 上，且 $OP\cdot OP'=r^2$，⊙O 叫做反演圆，点 O 是反演中心．

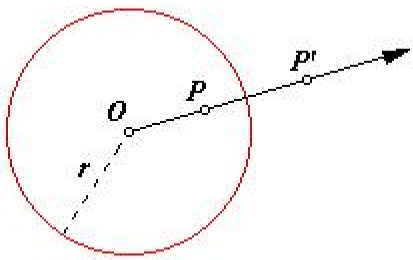


图 7：反演变换定义

由反演变换的定义不难得到下面显然的结论：

若 $OP\cdot OP'=r^2$，则 $OP'\cdot OP=r^2$	若点 P' 是点 P 的反演点，则点 P 也是点 P' 的反演点.
如果 $OP<r$，那么 $OP'>r$	若一个点位于反演圆的内部，则其反演点位于反演圆的外部.
如果 $OP>r$，那么 $OP'<r$	若一个点位于反演圆的外部，则其反演点位于反演圆的内部.
如果 $OP=r$，那么 $OP'=r$	若一个点位于反演圆上，那么它的反演点也在反演圆上.

进一步思考我们不难理解下面的几条关于反演变换的性质：

1、不过反演中心的圆其反演图形还是圆.

如图 8 所示，左侧的小圆的反演图形是右侧的大圆. 我们来简单说明一下：图中小圆的直径是线段 BC，点 O、B、C 三点共线，由反演定义知：$OR\cdot OR'=OS\cdot OS'=r^2$，$OS'=\dfrac{r^2}{OS}$，$OS'=\dfrac{r^2}{OS\cdot OR}\cdot OR$，再由圆幂定理得 $OB\cdot OC=OS\cdot OR$，进而 $OS'=\dfrac{r^2}{OB\cdot OC}\cdot OR$，其中 $\dfrac{r^2}{OB\cdot OC}$ 为定值，这意味着每当给定一个点 R，我们总可以以点 O 为位似中心，以 $\dfrac{r^2}{OB\cdot OC}$ 为位似比缩放得到唯一个与之对应的点 S'，所以当点 R 在以线段 BC 为直径的圆上运动一周时，点 S' 的轨迹必定为圆.

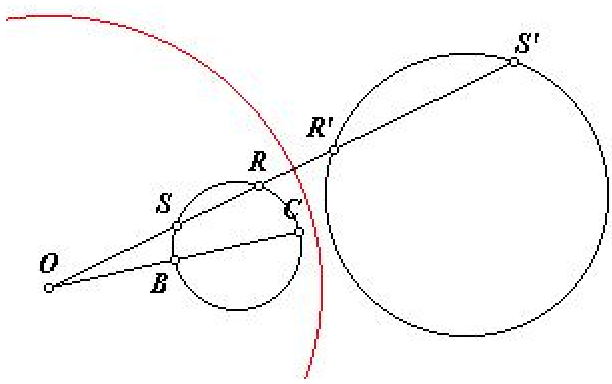


图 8：反演变换性质 1

2、过反演中心的圆其反演图形是一条直线.

如图 9 所示，小圆经过反演中心 O，其反演图形为右侧的直线. 我们来简单解释一下：OD 为小圆的直径，所以∠OPD=90°，由反演定义得：$OD\cdot OE=r^2=OP\cdot OP'$，所以

$\dfrac{OD}{OP'}=\dfrac{OP}{OE}$，又因为$\angle POD=\angle EOP'$，所以有$\triangle POD\cong\triangle EOP'$，这样我们得到$\angle OEP'=\angle OPD=90^\circ$．所以点$P'$必在过点$E$且垂直$OD$的直线上，而这样的直线是唯一的，当点$P$逐渐逼近点$O$时，点$P'$接近垂线的极限，该极限是无穷远处的点．

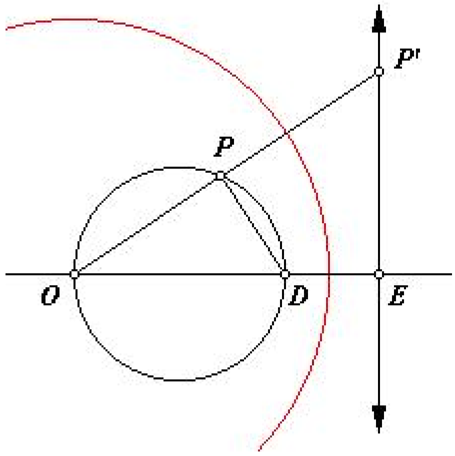


图 9：反演变换性质 2

3、不过反演中心的直线其反演图形是过反演中心的圆．这一条性质实质上是性质 2 的逆命题，根据反演定义不难理解，请读者自己证明．

4、除了以上三条常见性质外，反演变换还有许多其他性质，特别值得一提的是：反演变换的保角性．如图 10 所示，s 是曲线，点 A 和 B 在 s 上，s'、A'和 B'是它们各自的反演图形．首先由$OA\cdot OA'=OB\cdot OB'=r^2$以及$\angle AOB=\angle B'OA'$，容易证明$\triangle AOB\backsim\triangle B'OA'$，进而可证$\angle OBA=\angle OA'B'$．现在假设 B 点是曲线 s 上的动点，当点 B 接近点 A 时会发生什么？直线 AB 和 $A'B'$接近它们各自曲线的切线，其中一个角接近 s 和 OA 之间的交角，而另一个接近其反向角．

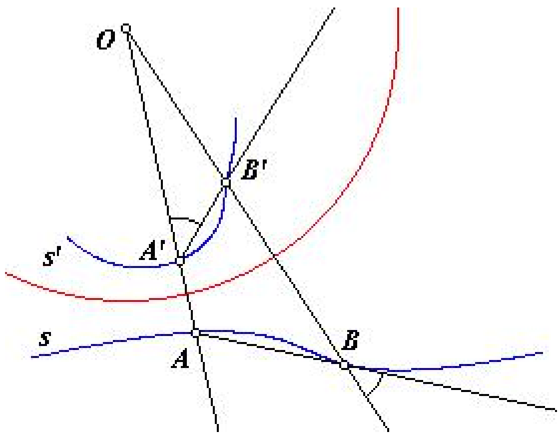


图 10：反演变换的保角性

反演变换的保角性确保了原本相切的两个几何对象在反演后依然相切,对这条性质的理解要多花些时间细细揣摩.

【小试牛刀】

请利用本文所学反演变换制作下面的“鞋匠的刀”:

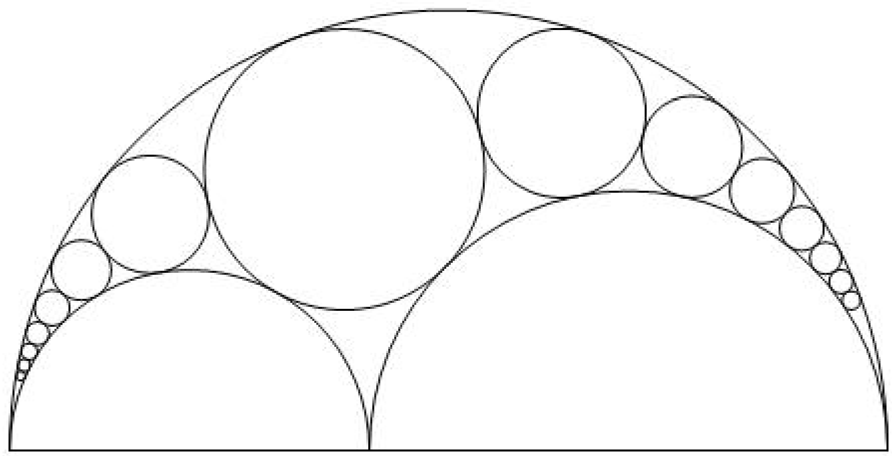


图 11:“鞋匠的刀”