

网络画板赛第 85 期打插题分享

2018

标题



作者：苏州市木渎实验中学金晓亮

成都景中教育软件有限公司

2018/10/5



一、分享说明:

出这期的目的本来想趁前面刚写了对迭代的理解,想通过此题的解决来对迭代的过程理解的更深入有些。但是可能这题还是比较难吧,没有达到出题的目的。我本人对这题的制作过程也没有理解,最主要的是没理解这题制作过程中的数学原理,所以有些地方也说不清楚,也很肯能有些地方会说错,希望大家见谅。还有一点,本例的分享是针对我一开始制作的效果的,后来参赛制作的那个由于不知道什么原因太卡,所以就不准备讲解那个制作过程了,但是思路是类似的。

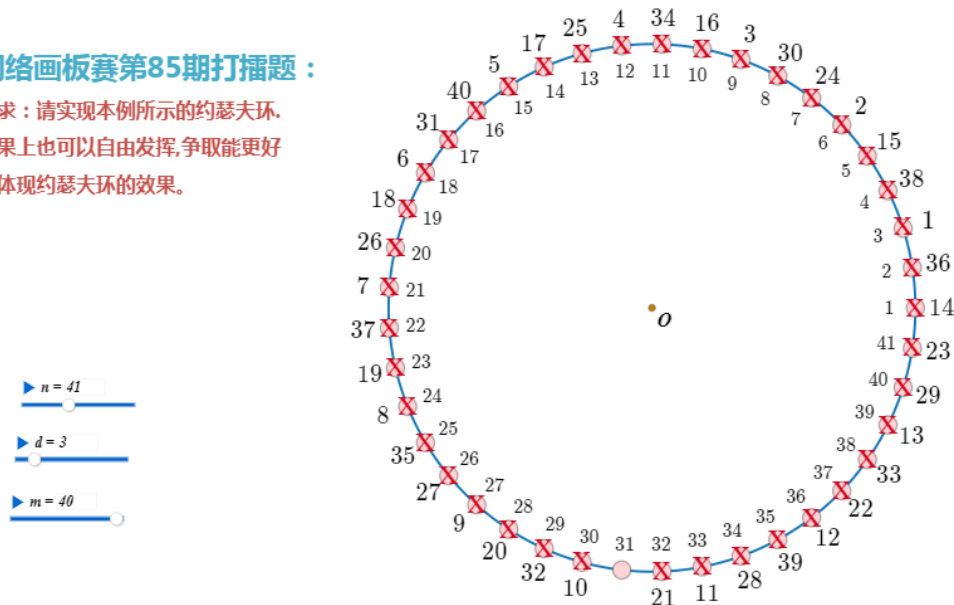
二、题目展示:

打播题想要实现如下图所示的约瑟夫抽杀问题的动态演示:

其中变量 n 表示参与游戏的总人数; 变量 d 表示报数的间隔 (每 d 个人循环报数); 变量 m 表示当前循环次数 (也就是第 m 个人被杀掉)

网络画板赛第85期打播题:

要求: 请实现本例所示的约瑟夫环, 效果上也可以自由发挥, 争取能更好的体现约瑟夫环的效果。



三、题目分析:

1. 本题首先需要生成圆环上的 n 个点, 然后对 n 个点进行编号, 这一步并不困难;
2. 接着需要按次序依次使得对应编号的点删掉 (因为要实现删除对象网板感觉不能实现, 所以用标记 “ \times ” 表示该点删掉了), 这一步是非常难的。要实现这个效果肯定需要用迭代来实现。本题迭代的难点就是如何利用上一个被删除点的编号计算出下一个要删除点的编号。但是如果要通过数数来确定下一个被删除点的编号, 那么在迭代过程中, 必须要能够对每个点的不同状态不同状态进行标记并且在迭代过程中能够读出这些点的状态, 而且还需要在每次迭代中能够实时更新每个点的状态, 我感觉这是网板做不到的。所以这个思路不可行。那么, 这题到底该如何做呢?

这题的关键就是要找到约瑟夫环的递推关系, 为此, 我在网上搜索到了介绍约瑟夫环递推关系的文章。



四、约瑟夫环递推关系介绍

问题：N 个人编号为 1, 2, …, N, 依次报数，每报到 M 时，杀掉那个人，求最后胜利者的编号。

递推公式： $f(N,M)=(f(N-1,M)+M)\%N$

$f(N,M)$ 表示，N 个人报数，每报到 M 时杀掉那个人，最终胜利者的编号

$f(N-1,M)$ 表示，N-1 个人报数，每报到 M 时杀掉那个人，最终胜利者的编号

下面我们不用字母表示每一个人，而用数字。

1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11

表示 11 个人，他们先排成一排，假设每报到 3 的人被杀掉。

- 刚开始时，头一个人编号是 1，从他开始报数，第一轮被杀掉的是编号 3 的人。
- 编号 4 的人从 1 开始重新报数，这时候我们可以认为编号 4 这个人是队伍的头。第二轮被杀掉的是编号 6 的人。
- 编号 7 的人开始重新报数，这时候我们可以认为编号 7 这个人是队伍的头。第三轮被杀掉的是编号 9 的人。
- ……
- 第九轮时，编号 2 的人开始重新报数，这时候我们可以认为编号 2 这个人是队伍的头。这轮被杀掉的是编号 8 的人。
- 下一个人还是编号为 2 的人，他从 1 开始报数，不幸的是他在这轮被杀掉了。
- 最后的胜利者是编号为 7 的人。

下面我们利用公式对上面一个例子的过程分析一下：

这个公式描述的是：幸存者在这一轮的下标位置

$f(1,3)$ ：只有 1 个人了，那个人就是获胜者，他的下标位置是 0

$f(2,3)=(f(1,3)+3)\%2=3\%2=1$ ：在有 2 个人的时候，胜利者的下标位置为 1

$f(3,3)=(f(2,3)+3)\%3=4\%3=1$ ：在有 3 个人的时候，胜利者的下标位置为 1

$f(4,3)=(f(3,3)+3)\%4=4\%4=0$ ：在有 4 个人的时候，胜利者的下标位置为 0

……

$f(11,3)=6$

说明：这里的下标是从 0 开始，因为取余的最小值是 0，为了简便期间，所以规定下标从 0 开始。

从这个过程中可以看出，要想知道后面一轮的结果，可以利用上一轮的结果计算出来。

为了更好的理解这一递推关系，我们再来看下面 3 个问题：

问题 1：假设我们已经知道 11 个人时，胜利者的下标位置为 6。那下一轮 10 个人时，胜利者的下标位置为多少？

答：其实吧，第一轮删掉编号为 3 的人后，之后的人都往前面移动了 3 位，胜利者也往前移动了 3 位，所以下标位置由 6 变成 3。

问题 2：假设我们已经知道 10 个人时，胜利者的下标位置为 3。那下一轮 11 个人时，胜利



者的下标位置为多少？

答：这可以看成是上一个问题的逆过程，大家都往后移动 3 位，所以 $f(11,3)=f(10,3)+3$ 。不过有可能结果会越界，所以最后模上当前人数的个数， $f(11,3)=(f(10,3)+3)\%11$

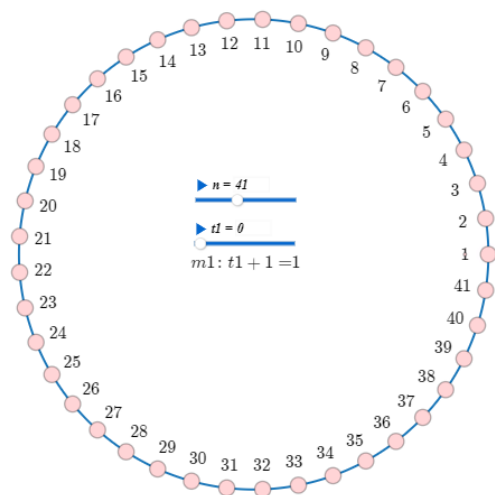
问题 3：现在人数改为 N，报到 M 时，把那个人杀掉，那么结果是怎么移动的？

答：每杀掉一个人，下一个人成为头，相当于把每个人的下标位置向前移动 M 位。若已知 N-1 个人时，胜利者的下标位置 $f(N-1,M)$ ，则 N 个人的时候，就是往后移动 M 为，(因为有可能结果越界，超过的部分会被接到头上，所以还要模 N)，既 $f(N,M)=(f(N-1,M)+M)\%n$

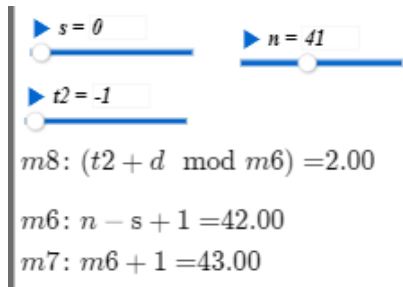
注：理解这个递推式的核心在于关注胜利者的下标位置是怎么变的。每杀掉一个人，其实就是把每个人的下标位置向前移动了 M 位。然后反过来，就可以得到这个递推式。

五、制作步骤：

1.首先利用一次迭代制作图形的框架：由于这个比较简单，而且我也在之前《迭代进阶》里提过提过这个做法，在这里就不再赘述了。

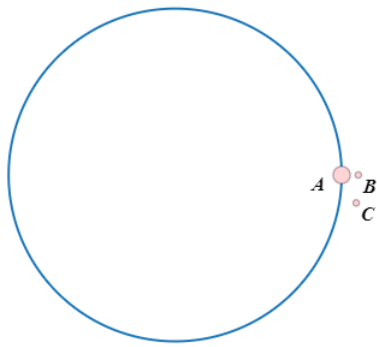


2.用到的变量以及计算式，以便于后面进行关键的第 2 次迭代：



其中变量 n 和第一步中的变量 n 是同一个变量，表示总人数；变量 s 用于生成第 3 次迭代，目的是使得第 2 次迭代的结果对第 3 次迭代产生影响。变量 t2、m8、m6、m7 用于第 2 次迭代。

3.制作第 2 次迭代：



- ① 点 A 是绘制圆时的半自由点；
- ② 以点 O 为中心，缩放比为 1.1 缩放点 A 生成点 B；
- ③ 以点 O 为中心，把点 B 逆时针旋转 $2\pi * t2 / n$ 得到点 C；
- ④ 生成第 2 次迭代。



说明：这一步迭代是本例的关键，也是本例的难点，本人对这一步骤也没有理解的很清楚，可能也没理解正确，我在这里把我的理解讲解一下，如果错误，请告知，谢谢。

这个迭代的作用就是产生每一步抽杀时被杀掉的人的编号，具体是通过变量 m 的值来控制进行了多少步，而这个控制又是通过第 3 个迭代中的迭代变量 s 来控制。也就是说，在本次迭代中，控制第几个人被杀掉是由这里的变量 s 来决定的。

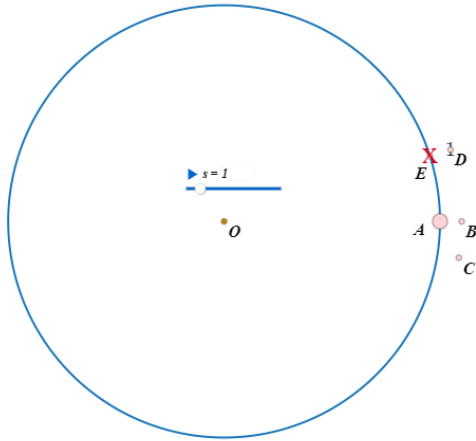
这个迭代原理就是用了之前说过的约瑟夫环递归关系： $f(N, M) = (f(N-1, M) + M) \% N$ $t2$ 可以理解为公式里的 $f(N-1, M)$ ， $m8$ 可以理解为公式里的 $f(N, M)$ ， $m8$ 中的 d 表示公式里的 M ， $m6$ 表示是公式里的 N 。

这个迭代具体解释如下：现在想得到第 s 次循环后被杀掉的人的编号（这个编号就是原始转态时的编号）。因为每次循环都会从新的编号 0 开始，所以如果我想计算第 s 次循环后，被杀掉的人的编号，那我就要从编号 0（对应 $f(N-1, M)$ 的值）开始，此时总人数为 $n-s+1$ （对应 N 的值），利用递推公式反推 s 次，就得到目标的原来的编号了。



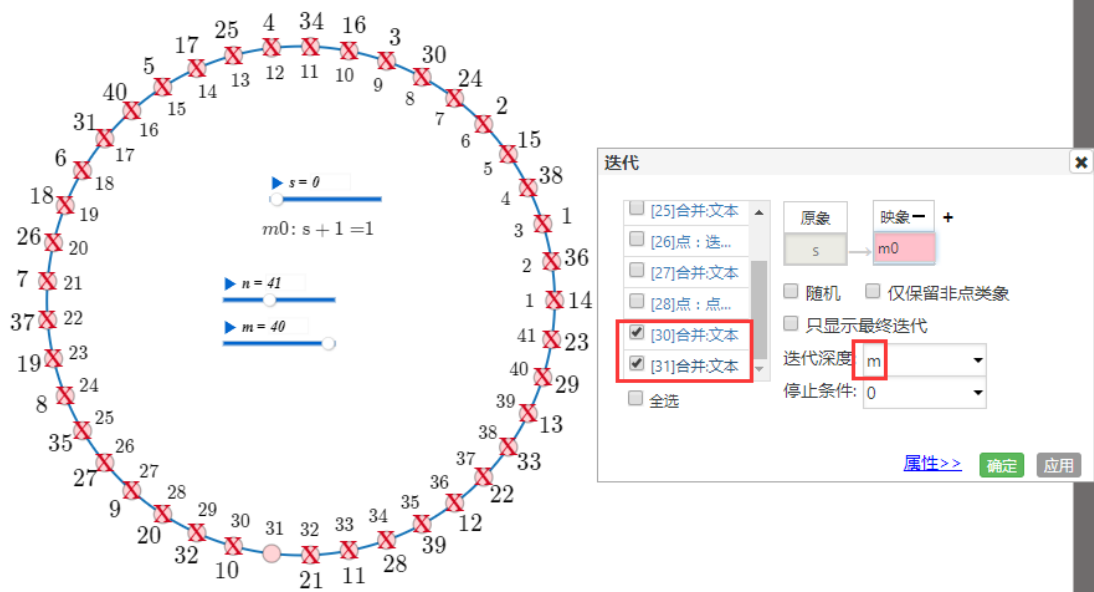
4.为最后一次迭代做准备:

- ①在第 2 次最终迭代上取实体点 D;
- ②以点 O 为缩放中心, 缩放比为 1/1.1 缩放点 D 得到点 E;
- ③把变量 s 合并到点 D;
- ⑤ 把标记 “×” 合并到点 E。



说明: 为了看得清新构造的点, 所以在这里先让变量 s 变成 1。

5. 进行最后一次迭代:



说明: 迭代中的对象 30 和对象 31 就是上一步合并的 s 和标记 “×”。

6.最后, 把变量 s 拖动到 0, 把一些其他不相干的对象隐藏就可以了。